Jurnal Ilmiah Matematika Realistik (JI-MR)

Vol. 4, No. 1, Juni 2023, 48-57
E-ISSN: 2723-6153
Tersedia: http://jim.teknokrat.ac.id/index.php/pendidikanmatematika/index

JI-MR

PENERAPAN PECAHAN BERSAMBUNG DALAM MELAKUKAN APROKSIMASI BILANGAN IRASIONAL MENUJU BILANGAN RASIONAL

Haves Qausar[1], Munzir Absa[2], Amam Taufiq Hidayat[3], Zainul Mujtahid[4]
Universitas Malikussaleh[1,2,3,4]
haves@unimal.ac.id

Received: 4 April 2023 **Accepted**: 29 Mei 2023 **Published :** 23 Juni 2023

Abstract

This research aims to find a rational approximation of an irrational number with more accurate accuracy using continued fractions. The method used in this research is a literature study on the properties of number theory related to continued fractions. The first stage of research is to collect data related to the research topic from books and international journals through internet search results on Google Scholar. Then data analysis was carried out through three stages, namely data reduction which is a process of simplifying, focusing and abstraction, data display which is compiling a set of information so that the presentation of data does not deviate from the subject matter and conclution/verifying is an attempt to find or understand the meaning, regularity of explanatory patterns. The result of this research is a detailed discussion related to the properties and application of continued fractions that can approach irrational numbers to rational numbers with the desired level of accuracy so that later rational numbers can be obtained that can approach irrational numbers with high accuracy. The conclusion is that every rational number can be written in PBSH form and every irrational number can be written in PBST form. The error of the p_n/q_n approximation for x is $< 1/q_n^2$ and q_n increases as n increases. As the value of n increases, p_n/q_n converges closer to x and the rational approximation p_n/q_n for x is better than all fractions a/b for any positive denominator $b \leq q_n$.

Keywords: *continued fractions, approximation, irrational numbers, rational numbers*

Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk mencari aproksimasi rasional dari suatu bilangan irasional dengan ketelitian yang lebih akurat menggunakan pecahan bersambung. Metode yang digunakan pada penelitian ini berupa studi literatur mengenai sifat-sifat pada teori bilangan yang terkait dengan pecahan bersambung. Tahapan peneltian yang pertama yaitu dilakukan pengumpulan data terkait topik penelitian dari buku dan jurnal internasional melalui hasil penelusuran menggunakan internet pada *Google Scholar*. Kemudian dilakukan analisis data melalui tiga tahapan yaitu *data reduction* (reduksi data) yang merupakan proses penyederhanaan, pemfokusan dan abstraksi, *data display* (penyajian data) yaitu menyusun sekumpulan informasi agar sajian data tidak menyimpang dari pokok permasalahan dan *conclution/verifying* (penarikan kesimpulan) merupakan usaha untuk mencari atau memahami makna, keteraturan pola-pola penjelasan. Hasil dari penelitian ini adalah berupa pembahasan secara mendetail terkait dengan sifat-sifat dan penerapan pecahan bersambung yang dapat mendekati bilangan irasional menuju bilangan rasional dengan tingkat ketelitian yang diinginkan sehingga nantinya dapat diperoleh bilangan rasional yang mampu mendekati bilangan irasional dengan ketelitian yang tinggi. Kesimpulannya adalah setiap bilangan rasional dapat ditulis dalam bentuk PBSH dan setiap bilangan irasional dapat ditulis dalam bentuk PBST. Galat pada pendekatan p_n/q_n untuk x adalah $< 1/q_n^2$ dan q_n semakin membesar dengan membesarnya n. Semakin besar nilai n, konvergen p_n/q_n semakin mendekati x dan pendekatan rasional p_n/q_n untuk x lebih baik dari semua pecahan a/b untuk setiap penyebut positif $b \leq q_n$.

Kata Kunci: pecahan bersambung, aproksimasi, bilangan irasional, bilangan rasional

Sitasi artikel ini:
Qausar, H., Absa, M., Hidayat, A.T., & Mujtahid, Z. (2023). Penerapan Pecahan Bersambung dalam Melakukan Aproksimasi Bilangan Irasional Menuju Bilangan Rasional. *Jurnal Ilmiah Matematika Realistik*, 4 1), 48-57.

PENDAHULUAN

Menentukan bilangan rasional a/b yang "paling dekat" dengan suatu bilangan riil x merupakan masalah penting didalam matematika. Masalah ini dikenal dengan sebutan pendekatan Diophantine (Schmidt, 2022). Tentu saja a/b dapat dipilih sedekat apapun yang diinginkan dengan cara memperbesar penyebut b, jadi yang dimaksud dengan "paling dekat" adalah dalam artian: Diberikan $x \in \mathbb{R}$ (himpunan semua bilangan riil) dan penyebut $b \in \mathbb{Z}^+ \stackrel{\text{def}}{=} \{1,2,\dots\}$, tentukan pembilang $a \in \mathbb{Z}^+ \stackrel{\text{def}}{=} \{0,\pm1,\pm2,\dots\}$ sehingga

$$\left|x-\frac{a}{b}\right| < \left|x-\frac{s}{t}\right| \tag{1}$$

untuk setiap pecahan s/t yang tidak sama dengan a/b dengan $1 \le t \le b$. Dengan kata lain, a/b paling dekat x untuk semua pecahan lain yang berpenyebut positif dan lebih kecil atau sama dengan b (Aka, et al., 2018). Pendekatan ini seringkali disebut juga pendekatan rasional (Koukoulopoulos, 2021).

Contoh kasus, pendekatan $22/7$ untuk $\pi \approx 3.14159265$. Mudah diperiksa bahwa

$$\left|\pi-\frac{22}{7}\right| < \left|\pi-\frac{s}{t}\right| \tag{2}$$

untuk semua pecahan s/t yang berpenyebut (positif) lebih kecil atau sama dengan 7. Pendekatan lain untuk π yang cukup fenomenal secara historis adalah $355/113$ (didapatkan pada abad ke 5 oleh Tsu Chung-Chih) sebab $355/113$ bukan hanya paling dekat dengan π untuk semua pecahan yang berpenyebut lebih kecil atau sama dengan 113, namun juga untuk semua penyebut yang lebih kecil atau sama dengan 16600 (Azarian, 2019). Sangat sulit dipercaya Tsu mendapatkan $355/113$ untuk π dengan cara memeriksa semua pecahan berpenyebut lebih kecil atau sama dengan 16600 satu per satu (cara ini disebut *brute-force* didalam pemrograman) (Zhang, et al., 2020), bahkan untuk era modern pun super-komputer tidak dapat (secara efisiensi waktu) melakukan *brute-force* untuk memeriksa ketaksamaan (1) untuk semua pecahan s/t yang berpenyebut lebih kecil atau sama dengan 16600 (Moe, et al., 2018).

Ada berbagai cara untuk menjawab permasalahan pendekatan Diophantine; tiga buah metode yang sering dipakai adalah: *Farey's sequence* (Sukhoy, et al., 2021), *Dirichlet's Approximation Theorem* (Kim & Liao, 2019), dan pecahan bersambung (Wall, 2018). Cara pertama memerlukan pengetahuan logika khusus tentang konstruksi $\mathbb{R}$ dari $\mathbb{N} \stackrel{\text{def}}{=} \{0,1,2,\dots\}$ (Cox, et al., 2021), sedangkan cara kedua memerlukan pengetahuan mendalam tentang analisis (Heil, 2019). Dalam tulisan ini akan dibahas cara ketiga, yakni pendekatan rasional dengan menggunakan pecahan bersambung, yaitu kuantitas yang berbentuk

$$a_0+\cfrac{b_0}{a_1+\cfrac{b_1}{a_2+\cfrac{b_2}{a_3+\cfrac{b_3}{\ddots}}}} \tag{3}$$

dengan setiap $a_i, b_i \in \mathbb{R}$. Bila setiap $b_i = 1$, $a_0 \in \mathbb{Z}$ dan $a_k \in \mathbb{Z}^+$ untuk $k \ge 1$, kuantitas itu disebut pecahan bersambung sederhana yang selanjutnya disingkat sebagai PBS.

METODE PENELITIAN

Pada penelitian ini, metode yang digunakan adalah studi literatur, yang melibatkan pengumpulan data dari berbagai sumber literatur seperti buku dan jurnal. Tujuan dari penelitian studi literatur adalah untuk membandingkan hasil-hasil penelitian yang berbeda satu sama lain, serta untuk mendapatkan landasan teori yang mendukung pemecahan masalah yang sedang diteliti. Penelitian ini juga bertujuan untuk mengungkapkan teori-teori yang relevan dengan kasus yang sedang dikaji. Secara spesifik, peneliti mengkaji penerapan pecahan bersambung dalam pendekatan bilangan irasional menuju bilangan rasional (Manzilati, 2017).

Selanjutnya, dilakukan pengumpulan data terkait topik penelitian. Data tersebut diperoleh melalui pencarian menggunakan kata kunci "*Continued fraction*", "*Continued fraction approximation*", dan "*Continued fraction number theory*" di *Google Scholar*, yang menghasilkan sebanyak 20 tulisan berupa buku dan jurnal internasional. Semua tulisan tersebut dikumpulkan dalam sebuah folder dan diurutkan agar memudahkan analisis. Analisis data merupakan proses untuk menyederhanakan data menjadi bentuk yang lebih mudah dibaca dan diimplementasikan. Tujuan analisis data adalah untuk menyampaikan informasi yang terkandung dalam data secara jelas. Dalam penelitian ini, terdapat tiga tahap analisis data, yaitu Reduksi Data (*Data Reduction*), Penyajian Data (*Data Display*), dan Penarikan Kesimpulan (*Conclution/Verifying*), yang dapat dijelaskan sebagai berikut: Reduksi data adalah proses penyederhanaan, pemfokusan, dan abstraksi data. Caranya dilakukan dengan membuat ringkasan atau uraian singkat, menggolongkan data ke dalam pola-pola tertentu, dan membuat tabel penelitian untuk mempertegas data serta membuang yang tidak relevan. Penyajian data adalah pengorganisasian informasi menjadi bentuk yang terstruktur sehingga memungkinkan penarikan kesimpulan dan pengambilan tindakan yang sesuai. Tujuannya adalah agar penyajian data tidak menyimpang dari inti permasalahan yang diteliti. Penarikan kesimpulan merupakan upaya untuk menemukan dan memahami makna serta pola-pola penjelasan. Kesimpulan yang ditarik dalam analisis data adalah isi yang terdapat dalam jurnal, yang tampak dan tersurat, bukan makna yang dirasakan oleh peneliti. Hal ini bertujuan untuk menjawab pertanyaan dan tujuan penelitian (Yansyari, 2019).

HASIL DAN PEMBAHASAN

Keterbagian

Dalil 1 (Algoritma Pembagian). *Diberikan* a *dan* b*, dengan* $b > 0$*, ada* q *dan* r *yang tunggal sehingga* $a = qb + r$*, dengan* $0 \leq r < b$. *Bilangan* q *disebut* hasil bagi *dan* r *disebut* sisa *dari pembagian* a *dengan* b (Gallian, 2021).
Bukti: untuk membuktikan keberadaan dari q dan r, tinjau himpunan

$$H = \{a - xb \geq 0 : x \in \mathbb{Z}\} \tag{4}$$

yang beranggotakan semua bilangan bulat tak-negatif berbentuk $a - xb$. Himpunan H tidak kosong, sebab dengan memilih $x = -|a|$ diperoleh

$$a - xb = a - (-|a|)b = a + |a|b \geq a + |a| \geq 0, \tag{5}$$

yaitu $a - (-|a|)b \in H$. Menurut WOP, H memiliki unsur terkecil, sebut r (Kowalski & Soundararajan, 2021). Dari definisi H jelas bahwa $r \geq 0$ dan r berbentuk $r = a - qb$ untuk suatu q. Untuk membuktikan $r < b$, asumsikan sebaliknya bahwa $r \geq b$, maka hubungan

$$0 \leq r - b = a - qb - b = a - (q + 1)b \tag{6}$$

mengatakan bahwa $r - b \in H$. Tetapi $r - b < r$, bertentangan dengan r sebagai unsur terkecil dari H. Jadi haruslah $r < b$. Tinggal dibuktikan ketunggalan dari q dan r. Untuk membuktikannya, asumsikan

$$qb + r = a = q_1 b + r_1 \tag{7}$$

untuk suatu q_1 dan r_1 dengan $0 \leq r_1 < b$. Jika $q_1 \neq q$ maka $|q_1 - q| \geq 1$ sehingga

$$|r - r_1| = |b(q_1 - q)| = b|q_1 - q| \geq b, \tag{8}$$

padahal $-b < r - r_1 < b$. Jadi haruslah $q = q_1$ dan ini mengakibatkan $r = r_1$ (Freud & Gyarmati, 2020).

Definisi 1. Bilangan b disebut kelipatan $a \neq 0$ bila ada c sehingga $b = ac$ dan ini dinotasikan dengan $a \mid b$. Negasinya dinotasikan dengan $a \nmid b$. Istilah lain untuk $a \mid b$ adalah "a membagi b" atau "b habis dibagi a" (Iliev, et al., 2020).

Definisi 2. Diberikan a dan b, dengan $a \neq 0$ atau $b \neq 0$, faktor persekutuan terbesar (FPB) dari a dan b, dinotasikan dengan gcd (a, b), adalah bilangan asli d yang memenuhi:

- $d \mid a$ dan $d \mid b$.
- Jika $c \mid a$ dan $c \mid b$ maka $c \mid d$.

Jika $\gcd(a,b) = 1$, maka a dan b disebut saling prima (Iliev, et al., 2018).

Dalil 2 (Lemma Euclid). *Jika* $a \mid bc$ *dan* $gcd(a,b) = 1$, *maka* $a \mid c$ (Dolgov, 2018).

Algoritma Euclid

Diberikan a dan $b \neq 0$, cara yang paling umum untuk menentukan $\gcd(a,b)$ adalah dengan menggunakan Algoritma Euclid (Rosenthal, 2018). Algoritma ini pada dasarnya berupa terapan dari Lemma 1 berikut.

Lemma 1. *Jika* $a = qb + r$, *maka* $gcd(a,b) = gcd\ (b,r)$ (Iliev, et al., 2018).
Bukti: Jika $c \mid a$ dan $c \mid b$ maka c membagi $a - bq = r$. Sebaliknya jika $c \mid b$ dan $c \mid r$ maka c membagi $bq + r = a$. Jadi pasangan (a,b) dan pasangan (b,r) memiliki pembagi sekutu yang sama, akibatnya $\gcd(a,b) = \gcd(b,r)$.

Pertama terapkan Algoritma Pembagian untuk a dan $r_0 = b$ sehingga diperoleh

$$a = q_1 r_0 + r_1, \qquad 0 \le r_1 < r_0. \tag{9}$$

Jika $r_1 > 0$, maka terapkan kembali Algoritma Pembagian pada r_0 dan r_1 untuk mendapatkan q_2 dan r_2 sehingga

$$r_0 = q_2 r_1 + r_2, \qquad 0 \le r_2 < r_1. \tag{10}$$

Proses serupa terus dilakukan sampai ditemukan indeks n sehingga $r_n = 0$. Jadi proses ini dapat dituliskan sebagai berikut (Effinger & mullen, 2021)

$$\begin{aligned} a &= q_1 r_0 + r_1, & 0 < r_1 < r_0, \\ r_0 &= q_2 r_1 + r_2, & 0 < r_2 < r_1, \\ r_1 &= q_3 r_2 + r_3, & 0 < r_3 < r_2, \\ r_{n-2} &= q_n r_{n-1} + r_n, & 0 < r_n < r_{n-1}, \\ & & \vdots \\ r_{n-1} &= q_{n+1} r_n + 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Perhatikan bahwa bilangan n yang demikian itu dijamin ada sebab

$$r_0 > r_1 > r_2 > \cdots \ge 0 \tag{12}$$

berupa barisan turun dari bilangan bulat yang berbatas bawah oleh nol. Sekarang dengan menggunakan lemma di atas secara beruntun diperoleh

$$gcd(a,b) = gcd(a,r_0) = gcd(r_0,r_1) = \cdots = gcd(r_{n-1},r_n) = gcd(r_n,0) = r_n \tag{13}$$

Sifat-sifat PBS

Telah dijelaskan bahwa PBS adalah kuantitas yang berbentuk

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots}}}} \tag{14}$$

dengan $a_0 \in \mathbb{Z}$ dan $a_i \in \mathbb{Z}^+$ untuk setiap $i \ge 1$. Karena ada tak-hingga buah a_i, tidak jelas apakah kuantitas di atas memiliki nilai atau tidak, namun nanti akan dibuktikan bahwa nilainya (dalam artian Definisi 4) selalu ada. Untuk menghemat penulisan, PBS di atas ditulis dengan

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots]. \tag{15}$$

Definisi 3. PBS

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}} \tag{16}$$

dikatakan hingga (selanjutnya disingkat dengan PBSH) dengan panjang n.

Jelas bahwa PBSH selalu memiliki nilai yang berupa bilangan rasional. Sebaliknya, diberikan bilangan rasional $\frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, b > 0$, ia dapat dinyatakan sebagai PBSH sebagai berikut: Pertama terapkan Algoritma Euclid untuk mencari gcd dari a dan $r_0 = b$; diperoleh

$$\begin{aligned} a &= r_0 a_0 + r_1, & 0 < r_1 < r_0, \\ r_0 &= r_1 a_1 + r_2, & 0 < r_2 < r_1, \\ r_1 &= r_2 a_2 + r_3, & 0 < r_3 < r_2, \\ r_{n-2} &= r_{n-1} a_{n-1} + r_n, & 0 < r_n < r_{n-1}, \\ & \vdots & \\ r_{n-1} &= r_n a_n + 0. & \end{aligned} \tag{17}$$

Karena

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} = \frac{a}{r_0} &= a_0 + \frac{r_1}{r_0} = a_0 + \frac{1}{\frac{r_0}{r_1}}, \\ \frac{r_0}{r_1} &= a_1 + \frac{r_2}{r_1} = a_1 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}, \\ \frac{r_1}{r_2} &= a_2 + \frac{r_3}{r_2} = a_2 + \frac{1}{\frac{r_2}{r_3}}, \\ & \vdots \\ \frac{r_{n-1}}{r_n} &= a_n, \end{aligned} \tag{18}$$

Maka

$$\frac{a}{b} = a_0 + \frac{1}{\frac{r_0}{r_1}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\frac{r_1}{r_2}}} = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\frac{r_2}{r_3}}}} \tag{19}$$

dan seterusnya sampai akhirnya didapatkan

$$\frac{a}{b} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}} = [a_0; a_1, \dots, a_n]. \tag{20}$$

Perhatikan bahwa bilangan bulat $a_1, a_2, \dots$ semuanya positif sebab setiap r_i positif, sedangkan a_0 bisa positif, negatif atau nol bergantung pada nilai a.

Meskipun setiap a_i tunggal, PBSH dari a/b tidak tunggal tergantung pada $a_n = 1$ atau $a_n > 1$. Jika $a_n > 1$ maka $a_n - 1 \geq 1$ dan

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{(a_n - 1) + \frac{1}{1}} \tag{21}$$

Sehingga

$$[a_0; a_1, \ldots., a_n] = [a_0; a_1, \ldots., a_{n-1}, a_n - 1,1] \tag{22}$$

Perhatikan bahwa PBSH dari a/b pada ruas kiri memiliki panjang n, sedang pada ruas kanan panjangnya adalah $n + 1$. Jika $a_n = 1$, maka $a_{n-1} + \frac{1}{a_n} = a_{n-1} + 1$, jadi

$$[a_0; a_1, \ldots., a_n] = [a_0; a_1, \ldots., a_{n-2}, a_{n-1} + 1] \tag{23}$$

yang masing-masing memiliki panjang n dan $n - 1$. Pembahasan di atas merupakan bukti dalil berikut.
Dalil 3. *Sembarang bilangan rasional dapat ditulis sebaai PBSH dan panjangnya selalu dapat dibuat genap ataau ganjil, tergantung apa yang dikehendaki.*

Definisi 4. Diberikan PBS

$$[a_0; a_1, a_2, \ldots] \tag{24}$$

notasikan $C_0 = a_0$ dan

$$C_i = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_i], \quad i \geq 1. \tag{25}$$

Untuk setiap $k \geq 0$, pecahan C_k disebut konvergen ke-k dari PBS $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$. Nilai dari PBS $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ didefinisikan sebagai lim C_k asalkan limit itu ada.

Jadi $[a_0; a_1, a_2, \ldots] = L$, jika diberikan $\epsilon \in \mathbb{R}^+$, berapapun kecilnya, ada $N \in \mathbb{Z}^+$ sehingga $|L - C_k| < \epsilon$ untuk setiap $k \geq N$. Akan diselidiki kekonvergenan dari barisan (C_k). Berdasarkan beberapa informasi

$$C_0 = a_0 = \frac{a_0}{1} \qquad C_2 = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = \frac{a_2(a_1a_0 + 1)a_0}{a_2a_1 + 1}$$

$$C_1 = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_1a_0 + 1}{a_1} \qquad C_3 = a_0; a_1, a_2, a_3 = \frac{a_3[a_2(a_1a_0 + 1) + a_0] + (a_1a_0) + 1}{a_3(a_2a_1 + 1) + a_1}$$

$$C_0 = \frac{p_0}{q_0} \qquad C_2 = \frac{p_2}{q_2} = \frac{a_2p_1 + p_0}{a_2q_1 + q_0}$$

$$C_1 = \frac{p_1}{q_1} \qquad C_3 = \frac{p_3}{q_3} = \frac{a_3p_2 + p_1}{a_3q_2 + q_1}$$

didapat sebuah pola yang akan dibuktikan kebenarannya bahwa:

Dalil 4. *Diberikan PBS* $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$, *didefinisikan*

$$\begin{gathered} p_{-1} = 1, p_0 = a_0, p_i = a_ip_{i-1} + p_{i-2} \textit{ bila } i \geq 1, \\ q_{-1} = 0, q_0 = 1, q_i = a_iq_{i-1} + q_{i-2} \textit{ bila } i \geq 1, \end{gathered} \tag{26}$$

maka

$$C_k = \frac{p_k}{q_k} \qquad k \geq 0. \tag{27}$$

Bukti. Telah diperiksa (28) berlaku untuk $k = 0$ dan $k = 1$. Asumsikan (28) berlaku untuk suatu $k = m \geq 1$, jadi

$$C_m = [a_0; a_1, \ldots, a_m] = \frac{p_m}{q_m} = \frac{a_mp_{m-1} + p_{m-2}}{a_mq_{m-1} + q_{m-2}}, \tag{28}$$

Karena nilai $p_{m-1}, p_{m-2}, q_{m-1}, q_{m-2}$ hanya bergantung pada $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$ dan tidak bergantung pada a_m, maka

$$C_{m+1} = \left[a_0; a_1, \dots, a_{m-1}, a_m + \frac{1}{a_{m+1}}\right] = \frac{\left(a_m + \frac{1}{a_{m+1}}\right) p_{m-1} + p_{m-2}}{\left(a_m + \frac{1}{a_{m+1}}\right) q_{m-1} + q_{m-2}} = \frac{a_{m+1}(a_m p_{m-1} + p_{m-2}) + p_{m-1}}{a_{m+1}(a_m q_{m-1} + q_{m-2}) + q_{m-1}} \quad (29)$$

$$= \frac{a_{m+1} p_m + p_{m-1}}{a_{m+1} q_m + q_{m-1}} = \frac{p_{m+1}}{q_{m+1}}$$

dan (28) terbukti secara induksi.

Contoh 1. Ketelitian untuk π dalam 8 desimal adalah

$$\pi \approx 3.14159265 \ = \ 314159265/10^8.$$

Penerapn Algoritma Euclid untuk 314159265 dan $10^8 = 100000000$ memberikan

$$\begin{gathered}
314159265 = 3 \cdot 100000000 + 14159265 \\
100000000 = 7 \cdot \ 14159265 + 885145 \\
14159265 = 15 \cdot 885145 + 882090 \\
885145 = 1 \cdot 882090 + 3055 \\
882090 = 288 \cdot 3055 + 2250 \\
3055 = 1 \cdot 2250 + 805 \\
2250 = 2 \cdot 805 + 640 \\
805 = 1 \cdot 640 + 165 \\
640 = 3 \cdot 165 + 145 \\
165 = 1 \cdot 145 + 20 \\
145 = 7 \cdot 20 + 5 \\
20 = 4 \cdot 5
\end{gathered}$$

sehingga

$$3.14159265 = [3; 7,15,1, 288, 1, 2, 1, 3, 1, 7, 4]$$

(atau $= [3; 7,15,1, 288, 1, 2, 1, 3, 1, 7, 3, 1]$ bila panjang yang diinginkan genap). Untuk menghitung C_k digunakan aturan rekursif (27):

$p_{-1} = 1,$ $p_1 = 7 \cdot 3 + 1 = 22,$ $p_3 = 1 \cdot 333 + 22 = 355,$
$p_0 = 3,$ $p_2 = 15 \cdot 22 + 3 = 333,$ $p_4 = 288 \cdot 355 + 333 = 102573, \dots.$

$q_{-1} = 0,$ $q_1 = 7 \cdot 1 + 0 = 7,$ $q_3 = 1 \cdot 106 + 7 = 113,$
$q_0 = 1,$ $q_2 = 15 \cdot 7 + 1 = 106,$ $q_4 = \ 288 \cdot 113 + 106 = 32650, \dots.$

maka $C_0, C_1, \dots, C_4 = \frac{3}{1}. \frac{22}{7}. \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{102573}{3265}$ berturut turut.

Definisi 5. Nilai PBST $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ didefinisikan sebagai $\lim_{n\to\infty} [a_0; a_1, a_2, \dots]$.

PBS dari Bilangan Irasional

Dalam menyatakan pecahan $x_0 = a/b$ kebentuk PBSH $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ terlihat bahwa a_0 yang didapatkan adalah berupa bagian bulat dari x_0, yaitu

$$a_0 = \lfloor x_0 \rfloor \quad (30)$$

Dengan simbol $\lfloor s \rfloor$ didefinisikan sebagai bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan s. Sebagai contoh

$$\lfloor 3.99 \rfloor = 3, \qquad \lfloor 5 \rfloor = 5, \ \ \lfloor -5 \rfloor = -5, \ \ \lfloor -5{,}01 \rfloor = -6$$

Kemudian a_1 juga didapatkan dengan cara mengambil bilangan bulat, namun kali ini pada bilangan baru $x_1 = {}^{b}/_{r_1}$. Jadi $a_1 = \lfloor x_1 \rfloor$ dan

$$x_1 = \frac{b}{r_1} = \frac{b}{a - ba_0} = \frac{1}{\frac{a}{b} - a_0} = \frac{1}{x_0 - a_0} \tag{31}$$

Begitu seterusnya untuk mendapatkan $a_2, a_3, \ldots$ secara rekursif. Metode serupa bisa diterapkan meskipun bilangan x_0 yang diberikan irasional. Ini dirangkum didalam:

Dalil 5. *Misalkan x_0 bilangan irasional. Untuk setiap $k \geq 0$ didefinisikan*

$$a_k = \lfloor x_k \rfloor \text{ dan } x_{k+1} = \frac{1}{x_k - a_k} \tag{32}$$

maka $[a_0; a_1, a_2, \ldots] = x_0$.
Bukti: Sebelum membuktikan PBST $[a_0; a_1, a_2, \ldots]$ konvergen ke x_0 perlu dipastikan dahulu bahwa a_0 bulat dan setiap $a_1, a_2, ..$ bilangan asli. Untuk setiap $k \geq 0$ jelas bahwa x_{k+1} irasional bila x_k irasional. Karena x_0 irasional, maka secara induktif x_k irasional. Jadi $0 < x_k - a_k < 1$, atau

$$x_{k+1} = \frac{1}{x_k - a_k} > 1 \tag{33}$$

Yang berakibat setiap $a_{k+1} = \lfloor x_{k+1} \rfloor$ bilangan asli. Namun a_0 bisa bernilai negatif atau 0 bergantung pada $x_0 < 0$ atau $0 < x_0 < 1$.
Akan ditunjukan $x_0 = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$. Dari rekursif (42) diperoleh

$$x_0 = a_0 + \frac{1}{x_1} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{x_2}} = \cdots = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n, x_{n+1}] = \frac{x_{n+1}p_n + p_{n-1}}{x_{n+1}q_n + q_{n-1}} \tag{34}$$

Untuk setiap $n \in Z^+$. Karena

$$x_0 - C_n = \frac{x_{n+1}p_n + p_{n-1}}{x_{n+1}q_n + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1}}{\left(x_{n+1}q_n + q_{n-1}\right)q_n} = \frac{(-1)^n}{\left(x_{n+1}q_n + q_{n-1}\right)q_n} \tag{35}$$

dengan $x_{n+1} > 1$ dan $q_k \geq k$ untuk setiap $k \geq 1$, maka

$$\lim_{n \to \infty} (x_0 - C_n) = 0 \tag{36}$$

Sehingga $[a_0; a_1, a_2, \ldots] = \lim_{n \to \infty} C_n = x_0$

Akibat 1. Jika p_k / q_k adalah konvergen ke n dari bilangan irasional x, maka

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_{n+1}q_n} < \frac{1}{{q_n}^2} \tag{37}$$

Contoh 2. Bilangan $\sqrt{37}$ bisa ditulis ke dalam bentuk PBST sebagai berikut:

$$x_0 = \sqrt{37} = 6 + \left(\sqrt{37} - 6\right), \qquad a_0 = 6,$$
$$x_1 = \frac{1}{x_0 - \lfloor x_0 \rfloor} = \frac{1}{\sqrt{37} - 6} = \sqrt{37} + 6 = 12 + (\sqrt{37} - 6) \qquad a_1 = 12.$$

Karena $x_2 = x_1$; maka $x_j = x_1$ untuk setiap $j \geq 2$, jadi $a_j = 12$ untuk setiap $j \geq 2$. Jadi $\sqrt{37} = [6; 12,12, \ldots]$. Untuk menghitung C_k digunakan rekursif (27);

$p_{-1} = 1,$	$p_1 = 12 \cdot 6 + 1 = 73,$	$p_3 = 12 \cdot 882 + 73 = 10657,$
$p_0 = 6,$	$p_2 = 12 \cdot 73 + 6 = 882,$	$p_4 = 12 \cdot 10657 + 882 = 128766, \ldots.$
$q_{-1} = 0,$	$q_1 = 12 \cdot 1 + 0 = 12,$	$q_3 = 12 \cdot 145 + 12 = 1752,$
$q_0 = 1,$	$q_2 = 12 \cdot 12 + 1 = 145,$	$q_4 = 12 \cdot 1752 + 145 = 21169, \ldots.$

maka $C_0, C_1, \ldots, C_4 = \frac{6}{1}. \frac{73}{12}. \frac{882}{145}, \frac{10657}{1752}, \frac{128766}{21169}$ berturut turut. Contoh diatas tidak hanya mendekatkan pendekatan rasional untuk $\sqrt{37}$ namun bisa menjawab pertanyaan: "Nyatakan $\sqrt{37}$ dalam bentuk desimal dengan ketelitian r desimal". Sebagai gambaran, karena

$$\left|\sqrt{37} - \frac{128766}{21169}\right| < \frac{1}{21169^2}$$

dan $\log 21169^2 = \log 448\ 126\ 561 \approx 8$, jadi pendekatan

$$\frac{128766}{21169} \approx 6.08276253011$$

untuk $\sqrt{37}$ memiliki ketelitian 8 desimal. Perhatikan bahwa

$$\frac{128766}{21169} \approx \frac{6.08276253011}{100\ 000\ 000\ 000}$$

namun pendekatan menggunakan pecahan bersambung menghasilkan pecahan dengan penyebut yang jauh lebih kecil (penyebut 21169 jauh lebih $< 100\ 000\ 000\ 000$). Secara umum, bilangan irasional pn dapat ditentukan bentuk desimalnya sampai berapapun yang diinginkan.

Contoh 3. Mencari pendekatan untuk konstanta Euler e digunakan fakta yang cukup dikenal bahwa

$$\frac{e-1}{2} = [0; 1,6,10,14, \ldots].$$

Untuk menghitung C_k digunakan rekursif (27)

$p_{-1} = 1,$	$p_1 = 1 \cdot 0 + 1 = 1,$	$p_3 = 10 \cdot 6 + 1 = 61,$
$p_0 = 0,$	$p_2 = 6 \cdot 1 + 0 = 6,$	$p_4 = 14 \cdot 61 + 6 = 860, \ldots.$
$q_{-1} = 0,$	$q_1 = 1 \cdot 1 + 0 = 1,$	$q_3 = 10 \cdot 7 + 1 = 71,$
$q_0 = 1,$	$q_2 = 6 \cdot 1 + 1 = 7,$	$q_4 = 14 \cdot 71 + 7 = 1001, \ldots.$

maka $C_0, C_1, \ldots, C_4 = \frac{0}{1}. \frac{1}{1}. \frac{6}{7}, \frac{61}{71}, \frac{860}{1001}$ berturut turut. Akibat 1 mengatakan bahwa

$$\left|\frac{e-1}{2} - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{{q_n}^2}.$$

Untuk konvergen ke-4,

$$\left|\frac{e-1}{2} - \frac{860}{1001}\right| < \frac{1}{1001^2}$$

sehingga

$$\left|e - 1 - \frac{1720}{1001}\right| = \left|e - \frac{2721}{1001}\right| < \frac{2}{1001^2} = \frac{2}{1002001}.$$

Karena $\log \frac{1002001}{2} = \log 501000.5 \approx 6$, maka pendekatan rasional $\frac{2721}{1001}$ untuk e meiliki ketelitian 6 desimal.

SIMPULAN

Jika tidak dinyatakan secara khusus, maka x adalah bilangan irasional dan p_n/q_n adalah konvergen ke-n dari PBST x. Berdasarkan hasil dan pembahasan, dapat diambil beberapa kesimpulan sebagai berikut: a) setiap bilangan rasional dapat ditulis dalam bentuk PBSH dan setiap bilangan irasional dapat ditulis dalam bentuk PBST; b) galat pada pendekatan p_n/q_n untuk x adalah $< 1/q_n^2$ dan q_n semakin membesar dengan membesarnya n; c) semakin besar nilai n, konvergen p_n/q_n semakin mendekati x. Pendekatan rasional p_n/q_n untuk x lebih baik dari semua pecahan a/b untuk setiap penyebut positif $b \leq q_n$.

REFERENSI

Aka, M., Breuillard, E., Rosenzweig, L., & Saxcé, d. N. (2018). Diophantine approximation on matrices and Lie groups. *Geom. Funct. Anal. 28(1), 1–57.* https://doi.org/10.1007/s00039-018-0436-0

Azarian, M. K. (2019). An Overview of Mathematical Contributions of Ghiyath al-Din Jamshid Al-Kashi [Kashani]. *Mathematics Interdisciplinary Research, 4(1), 11-19.* https://doi.org/10.22052/mir.2019.167225.1110

Cox, D., Ghosh, S., & Sultanow, E. (2021). The Farey Sequence and the Mertens Function. *arXiv*. https://doi.org/10.13140/RG.2.2.12856.26880

Dolgov, D.A. (2018). Polynomial Greatest Common Divisor as a Solution of System of Linear Equations. *Lobachevskii J Math*. *39(7), 985–991.* https://doi.org/10.1134/S1995080218070090

Effinger, G., & Mullen, G. L. (2021). *Elementary number theory*. Boca Raton: CRC Press

Freud, R., & Gyarmati, E. (2020). *Number theory* (Vol. 48). Rhode Island: American Mathematical Soc.

Gallian, J. A. (2021). *Contemporary abstract algebra* (10th Edition). New York: Chapman and Hall/CRC.

Heil, C. (2019). *Introduction to real analysis* (Vol. 280). Switzerland: Springer.

Iliev, A., & Kyurkchiev, N. (2018). A Note on Euclidean and Extended Euclidean Algorithms for Greatest Common Divisor for Polynomials. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 118(3), 713-721. https://doi.org/10.12732/ijpam.v118i3.18

Iliev, A., Kyurkchiev, N., & Rahnev, A. (2018). A New Improvement Euclidean Algorithm for Greatest Common Divisor. I. *Neural, Parallel, and Scientific Computations*, 26(3), 355-362. https://doi.org/10.12732/npsc.v26i3.10

Iliev, A., Kyurkchiev, N., & Rahnev, A. (2020). New Extended Algorithm for Finding Greatest Common Divisor. *Neural, Parallel, and Scientific Computations*, 28(1), 89-95. https://doi.org/10.12732/npsc.v28i1.10

Kim, D. H., & Liao, L. (2019). Dirichlet uniformly well-approximated numbers. *International Mathematics Research Notices*, 2019(24), 7691-7732. https://doi.org/10.48550/arXiv.1508.00520

Koukoulopoulos, D. (2021). Rational approximations of irrational numbers. *arXiv*:2109.11003. https://doi.org/10.48550/arXiv.2109.11003

Kowalski, E., & Soundararajan, K. (2021). Equidistribution from the Chinese remainder theorem. *Advances in Mathematics*, 385, 107776. https://doi.org/10.1016/j.aim.2021.107776

Manzilati, A. (2017). Metodologi Penelitian Kualitatif: Paradigma, Metode dan Aplikasi. Malang: UB Press.

Moe, K. S. M., & Win, T. (2018). Enhanced honey encryption algorithm for increasing message space against brute force attack. *In 2018 15th international conference on electrical engineering/electronics, computer, telecommunications and information technology (ECTI-CON)*, 86-89. https://doi.org/10.1109/ECTICon.2018.862005

Rosenthal, D., Rosenthal, D., Rosenthal, P., Rosenthal, D., Rosenthal, D., & Rosenthal, P. (2018). The Euclidean Algorithm and Applications. *A Readable Introduction to Real Mathematics*, 49-61. https://doi.org/10.1007/978-3-030-00632-7_7

Schmidt, W. M.. (2022). On simultaneous Diophantine approximation. *Monatsh Math*. 198(3), 641-650. https://doi.org/10.1007/s00605-021-01661-2

Sukhoy, V., & Stoytchev, A. (2021). Formulas and algorithms for the length of a Farey sequence. *Scientific reports*, 11(1), 22218. https://doi.org/10.1038/s41598-021-99545-w

Wall, H. S. (2018). *Analytic theory of continued fractions*. New York: Courier Dover Publications.

Yansyari, N. (2019). Studi Literatur Tentang Hubungan Intensitas Penggunaan Media Sosial Dengan Kualitas Tidur Pada Remaja. Malang: UB Press.

Zhang, S., Xie, X., & Xu, Y. (2020). A brute-force black-box method to attack machine learning-based systems in cybersecurity. *IEEE Access*, 8, 128250-128263. https://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.3008.